

## § Relação Geral:

Teoria Quântica de Campos  $\longleftrightarrow$  Mecânica Estatística (clássica)

$$\langle \phi(b) | \phi(a) \rangle = \sum_{\text{Todos os caminhos}} e^{\frac{i}{\hbar} I_m(t)} \quad (\text{Feynmann})$$

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{\phi\}} e^{-\frac{1}{\hbar} I_E(\tau)}$$

com uma rotação do tempo  $\tau = it$ .

Queremos agora estabelecer algo como um 'dicionário' entre as duas formulações. Faremos a correspondência no contexto da versão simétrica da teoria na rede, quando

$$\Delta\tau = a, \Rightarrow K_\tau = K,$$

mas é claro que a mesma correspondência pode ser feita no limite anisotrópico do tempo contínuo, com 'a' finito e  $\Delta\tau \rightarrow 0$ .

Nesse caso isotrópico  $\longrightarrow$

temos um problema de Mecânica Estatística numa rede simétrica, e uma formulação de teoria de Campos usando operadores  $\hat{\phi}(n), \hat{\pi}(n)$ , e um Hamiltoniano (complicado)  $\hat{\mathcal{H}}_S$ ,

tal que 
$$\hat{T} = e^{-\Delta\tau \hat{\mathcal{H}}_S}$$

A matriz de Transferência é hermitiana,  $\hat{T}^\dagger = \hat{T}$ ,

de maneira que pode ser diagonalizada com autovalores reais, que escreveremos como sendo  $\exp(-\Delta\tau E_i)$ . Os autovetores formam um conjunto ortogonal  $\{|i\rangle\}$ , e a decomposição espectral de  $\hat{T}$  é

$$\hat{T} = \sum_{\{i\}} |i\rangle e^{-\Delta\tau E_i} \langle i| \tag{34}$$

Para obter a função de partição precisamos de  $\hat{T}^N$

$$\hat{T}^N = \sum_{\{i\}} |i\rangle e^{-\Delta\tau N E_i} \langle i| \tag{35}$$

No limite termodinâmico, quando  $N \rightarrow \infty$ , a decomposição espectral é dominada pelo maior autovalor da matriz de transferência. Supomos então que o menor autovalor de  $\hat{\mathcal{H}}_S$  é

único, e o chamamos  $E_0$ . No regime  $N \rightarrow \infty$ , a <sup>208</sup> matriz de transferência pode ser escrita como

$$\hat{T}^N \sim |0\rangle e^{-\mathcal{E} E_0} \langle 0|, \quad (36)$$

onde  $\mathcal{E}$  é a diferença dos tempos (imaginários) final e inicial:

$$N\Delta\tau \equiv \mathcal{E}.$$

Neste caso temos a função de partição como

$$\mathcal{Z} = \text{Tr}(\hat{T}^N) \sim e^{-E_0 \mathcal{E}} \quad (37)$$

Mas a função de partição num problema de mecânica estatística está ligada à energia livre  $F$  como

$$\mathcal{Z} = e^{-F}, \quad (38)$$

onde o fator  $k_B T$  tem sido absorvido na definição de  $F$ .

Agora, a energia livre é uma grandeza extensiva e em  $d$ -dimensões deve-se ter

$$F \equiv f V_{d-1} \mathcal{E}, \quad (39)$$

onde  $V_{d-1}$  é o volume na parte espacial, e  $f$  é a densida

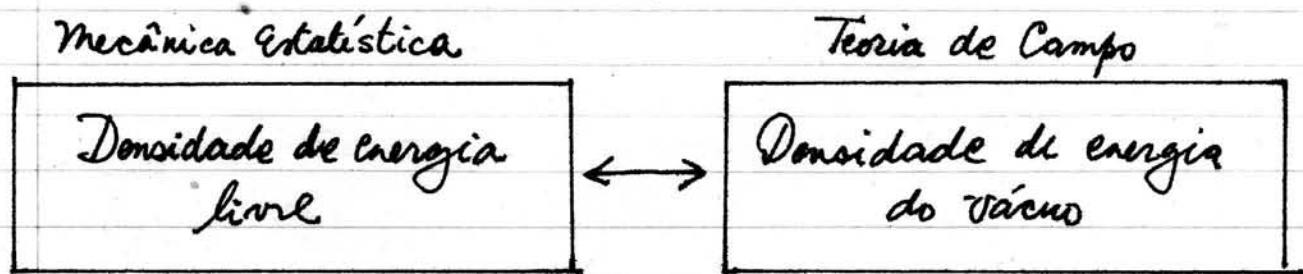
de de energia livre. Em forma similar,  $E_0$  é uma grandeza extensiva em  $(d-1)$  dimensões. Assim escrevemos

$$E_0 = \omega_0 V_{d-1},$$

onde  $\omega_0$  é a densidade de energia do vácuo quântico.

Assim a correspondência estabelecida é

$$f = \omega_0$$



Assim vemos que o autovalor maior da matriz de transferência está ligado à energia do vácuo (estado fundamental do problema quântico). A hipótese que este autovalor maior é único significa em termos mecânico-estatísticos que o sistema está na fase de temperatura alta.

Outra grandeza que tem análogo interessante é o propagador do campo. O propagador de Feynman do campo escalar é dado por

$$D_F(x) = \overbrace{\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(0)} = T \{ \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(0) \} - : \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(0) :$$

Tomando elemento de matriz com  $|0\rangle$  o estado fundamental exato de  $\hat{H}_S$ , obtemos

$$D_F(x) = \langle 0 | T \{ \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(0) \} | 0 \rangle ,$$

porque o elemento de matriz  $\langle 0 | : \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(0) : | 0 \rangle$  sempre é nulo. A notação é tal que  $x = (t, x_1, x_2, \dots, x_{d-1}) \equiv (t, \vec{x})$ .

O operador está expresso na representação de Heisenberg. Passamos à representação de Schrödinger por

$$\hat{\phi}(t, \vec{x}) = e^{i\hat{H}_S t} \hat{\phi}(\vec{x}) e^{-i\hat{H}_S t}$$

Seja então  $t > 0$ . O propagador fica

$$\begin{aligned} D_F(t, \vec{x}) &= \langle 0 | e^{i\hat{H}_S t} \hat{\phi}(\vec{x}) e^{-i\hat{H}_S t} \hat{\phi}(0) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \hat{\phi}(\vec{x}) e^{-i\hat{H}_S t} \hat{\phi}(0) | 0 \rangle e^{iE_0 t} \end{aligned}$$

Consideremos agora a função de correlação mecânico-estatística

$$\Gamma(n_0, \vec{n}) \equiv \langle \phi(n_0, \vec{x}) \phi(0, \vec{0}) \rangle =$$

$$= \frac{1}{Z} \int \prod_{n_0, \vec{n}} d\phi(n_0, \vec{n}) \left[ \phi(n_0, \vec{n}) \phi(0, \vec{0}) \right] e^{-I},$$

sendo que a integração é feita por fatias na direção temporal. O cálculo é feito da mesma maneira como para a função de partição usando a matriz de transferência. A única mudança acontece ao chegar as fatias com coordenadas temporais  $n_0$  e 0. Assim obtemos a expressão

$$\begin{aligned} \Gamma(n_0, \vec{n}) &= \frac{\text{Tr} \left\{ \hat{T}^P \hat{\Phi}(\vec{n}) \hat{T}^{n_0} \hat{\Phi}(0) \hat{T}^L \right\}}{\text{Tr} \left\{ \hat{T}^N \right\}} \\ &= \frac{\text{Tr} \left\{ \hat{\Phi}(\vec{n}) \hat{T}^{n_0} \hat{\Phi}(0) \hat{T}^{P+L} \right\}}{\text{Tr} \left\{ \hat{T}^N \right\}}, \end{aligned}$$

onde  $P+L+n_0 = N$ , número total de fatias. Tomemos

agora o limite  $N \rightarrow \infty$ , de maneira que

$$\hat{T} \sim |0\rangle e^{-E_0 \Delta\tau} \langle 0|$$

$$\Gamma(n_0, \vec{n}) \simeq e^{-E_0 \Delta\tau (P+L)} e^{+E_0 \Delta\tau N} \langle 0 | \hat{\Phi}(\vec{n}) e^{-n_0 \Delta\tau \hat{H}_S} \hat{\Phi}(0) | 0 \rangle$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_{+n_0 E_0 \Delta\tau}$

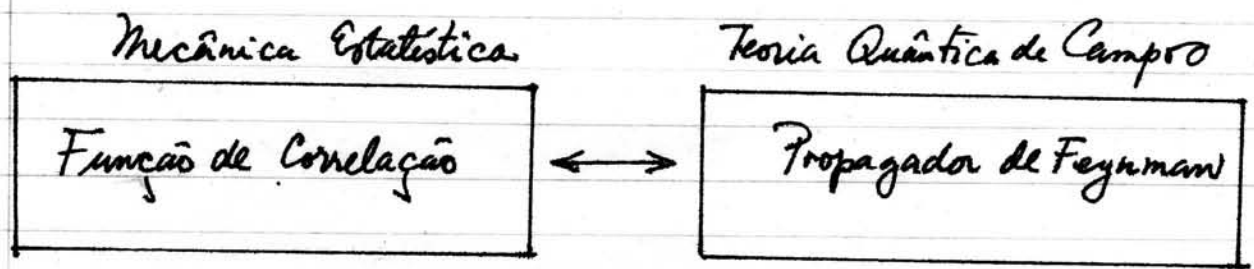


$$= e^{E_0 \Delta \tau n_0} \langle 0 | \hat{\phi}(\vec{n}) e^{-n_0 \Delta \tau \hat{H}_S} \hat{\phi}(0) | 0 \rangle$$

e escrevendo  $it = n_0 \Delta \tau$ , ou  $t = -in_0 \Delta \tau$ , vemos que existe a correspondência

$$\Gamma(n_0, \vec{n}) = D_F(-in_0 \Delta \tau, \vec{n}),$$

obtendo-se assim a relação:



O conhecimento da função de correlação na Mecânica Estatística implica o conhecimento do propagador da TQC para tempo imaginário. A continuação analítica para tempo real deve então ser feita. Os postulados gerais da teoria de campo garantem que tal continuação analítica é possível.

Da mecânica Estatística sabe-se que a função de correlação cai exponencialmente quando longe do ponto

crítico (fase de temperatura alta)

$$\Gamma(n_0, 0) \sim \exp(-|n_0|/\xi)$$

A grandeza  $\xi$  é chamada de comprimento de correlação.

Consideremos agora o propagador  $D_F(-in_0\Delta\tau, 0)$ ,  $n_0 > 0$

$$D_F(-in_0\Delta\tau, 0) = \langle 0 | e^{n_0\Delta\tau \hat{H}_S} \hat{\phi}(0) e^{-n_0\Delta\tau \hat{H}_S} \hat{\phi}(0) | 0 \rangle$$

Inserindo um conjunto completo de autofunções de  $\hat{H}_S$ , temos

$$D_F(-in_0\Delta\tau, 0) = \sum_{\ell} \langle 0 | e^{n_0\Delta\tau \hat{H}_S} \hat{\phi}(0) | \ell \rangle \langle \ell | e^{-n_0\Delta\tau \hat{H}_S} \hat{\phi}(0) | 0 \rangle$$

$$= \sum_{\ell} e^{-n_0\Delta\tau(E_{\ell}-E_0)} |\langle 0 | \hat{\phi}(0) | \ell \rangle|^2$$

Para  $n_0\Delta\tau \gg 1$ , a soma é dominada pela menor diferença  $(E_{\ell}-E_0)$ . Esta energia corresponde a criar a partícula mais leve com momentum nulo. Escrevemos então

$$E_1 - E_0 \equiv m \quad (= mc^2)$$

(com  $c=1$ ). O elemento de matriz  $\langle 0 | \hat{\phi}(0) | \ell \rangle$  certamente é não nulo neste caso. A diferença entre a energia do primeiro



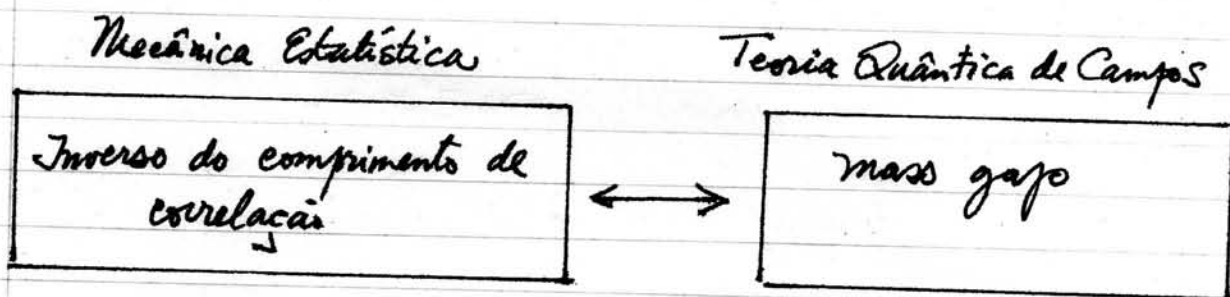
estado excitado e o estado fundamental é chamada de <sup>214</sup>  
mass-gap. Assim temos o resultado

$$D_F(-in_0\Delta\tau, 0) \sim e^{-n_0\Delta\tau m}$$

e sendo que  $\Gamma(n_0, 0) \sim e^{(-|n_0|/\xi)}$ , identificamos  
o mass-gap com o comprimento de correlação como segue

$$m \Leftrightarrow \frac{1}{a\xi},$$

onde temos usado o fato que  $\Delta\tau = a$ , no caso isotrópico.



Em Mecânica Estatística, uma divergência do comprimento de correlação caracteriza uma transição de fase, com o aparecimento da ordem de longo alcance. Estritamente,  $\xi \rightarrow \infty$  define a região crítica para uma transição de fase de segunda ordem. Da relação estabelecida acima

segue uma teoria de campos com partículas de pequenas massas equivale a fazer mecânica estatística perto do ponto crítico. Um limite interessante é dado por  $\alpha \rightarrow 0$  (contínuo), que significa que o espectro de excitações tem massas finitas só no caso  $\xi \rightarrow \infty$ .

Voltando ao caso da unicidade do estado fundamental: segue que o mass-gap é finito e então o comprimento de correlação  $\xi$  é finito. Isso corresponde ao caso de  $T > T_c$  para a mecânica estatística. A divergência de  $\xi$  está associada à  $m \rightarrow 0$ , que corresponde a ter um estado fundamental degenerado!

A matriz de Transferência é dominada pelos dois menores autovalores de  $\hat{H}_S$  (dois maiores autovalores de  $\hat{T}$ ):

$$\hat{T} = e^{-\Delta\tau \hat{H}_S}$$

Seja  $\lambda_0 = \exp(-\Delta\tau E_0)$ ,  $\lambda_1 = \exp(-\Delta\tau E_1)$ .

Temos:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \exp[\Delta\tau(E_1 - E_0)] = \exp(\Delta\tau m)$$

Dai:

$$\Delta\tau m = \ln\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)$$

$$e \quad m = \frac{1}{\Delta\tau} \ln\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)$$

$$= \frac{1}{a\xi}$$

Resultado:  $\xi = \frac{1}{\ln(\lambda_0/\lambda_1)} \xrightarrow{\lambda_1 \rightarrow \lambda_0} \infty$

A criticalidade implica em degenerescência.