§ Relação Geral:

Teoria Quântica de Campos $\longleftrightarrow$ Mecânica Estatística (clássica)

$$\langle \phi(b) | \phi(a) \rangle = \sum_{\text{Todos os caminhos}} e^{\frac{i}{\hbar} I_m(t)} \quad \text{(Feynmann)}$$

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{\phi\}} e^{-\frac{1}{\hbar} I_E(\tau)},$$

com uma rotação do tempo $\tau = it$.

Queremos agora estabelecer algo como um 'dicionário' entre as duas formulações. Faremos a correspondência no contexto da <u>versão simétrica</u> da teoria na rede, quando

$$\Delta\tau = a, \Rightarrow K_\tau = K,$$

mas é claro que a mesma correspondência pode ser feita no limite anisotrópico do tempo contínuo, com 'a' finito e $\Delta\tau \to 0$.

Nesse caso isotrópico $\longrightarrow$

temos um problema de Mecânica Estatística numa rede simétrica, e uma formulação de teoria de Campos usando operadores $\hat{\phi}(n)$, $\hat{\Pi}(n)$, e um Hamiltoniano (complicado) $\hat{\mathcal{H}}_s$, tal que

$$\hat{T} = e^{-\Delta\tau \hat{\mathcal{H}}_s}.$$

A matriz de Transferência é hermiteana, $\hat{T}^{\dagger} = \hat{T}$, de maneira que pode ser diagonalizada com autovalores reais, que escreveremos como sendo $\exp(-\Delta\tau E_i)$. Os autovetores formam um conjunto ortogonal $\{|i\rangle\}$, e a decomposição espectral de $\hat{T}$ é

$$\hat{T} = \sum_{\{i\}} |i\rangle e^{-\Delta\tau E_i} \langle i| . \qquad (34)$$

Para obter a função de partição precisamos de $\hat{T}^N$

$$\hat{T}^N = \sum_{\{i\}} |i\rangle e^{-\Delta\tau N E_i} \langle i| \qquad (35)$$

No limite termodinâmico, quando $N \to \infty$, a decomposição espectral é dominada pelo maior autovalor da matriz de transferência. Supomos então que o menor autovalor de $\hat{\mathcal{H}}_s$ é único, e o chamamos E_0. No regime $N \to \infty$, a matriz de tranoferência pode ser escrita como

$$\hat{T}^N \sim |0\rangle\, e^{-\mathcal{T}E_0} \langle 0| , \qquad (36)$$

onde $\mathcal{T}$ é a diferença dos tempos (imaginários) final e inicial:

$$N\Delta\tau \equiv \mathcal{T} .$$

Neste caso temos a função de partição como

$$\mathcal{Z} = T_r(\hat{T}^N) \sim e^{-E_0\mathcal{T}} \qquad (37)$$

Mas a função de partição num problema de mecânica estatística está ligada à energia livre F como

$$\mathcal{Z} = e^{-F} , \qquad (38)$$

onde o fator $k_B T$ tem sido absorvido na definição de F. Agora, a energia livre é uma grandeza extensiva e em d-dimensões deve-se ter

$$F \equiv f\, V_{d-1}\, \mathcal{T} , \qquad (39)$$

onde V_{d-1} é o volume na parte espacial, e f e a densidade de energia livre. Em forma similar, E_0 é uma grandeza extensiva em $(d-1)$ dimensões. Assim escrevemos

$$E_0 = \omega_0 V_{d-1} \quad ,$$

onde ω_0 é a densidade de energia do vácuo quântico.

Assim a correspondência estabelecida é

$$f = \omega_0$$

Mecânica Estatística		Teoria de Campo
Densidade de energia livre	$\longleftrightarrow$	Densidade de energia do vácuo

Assim vemos que o autovalor maior da matriz de transferência está ligado à energia do vácuo (estado fundamental do problema quântico). A hipótese que este autovalor maior é único significa em termos mecânico-estatísticos que o sistema está na fase de temperatura alta.

Outra grandeza que tem análogo interessante é o propagador do campo. O propagador de Feynman do campo escalar é dado por

$$\mathcal{D}_F(x) = \overbrace{\hat{\phi}(x)\,\hat{\phi}(0)} = T\{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(0)\} - :\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(0):$$

Tomando elemento de matriz com $|0\rangle$ o estado fundamental exato de $\hat{\mathcal{H}}_S$, obtemos

$$\mathcal{D}_F(x) = \langle 0|\, T\{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(0)\}\,|0\rangle ,$$

porque o elemento de matriz $\langle 0| :\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(0): |0\rangle$ sempre é nulo. A notação é tal que $x = (t, x_1, x_2 \ldots, x_{d-1}) \equiv (t, \vec{x})$.

O operador está expresso na representação de Heisenberg. Passamos à representação de Schrödinger por

$$\hat{\phi}(t,\vec{x}) = e^{i\hat{\mathcal{H}}_S t}\,\hat{\phi}(\vec{x})\,e^{-i\hat{\mathcal{H}}_S t} ,$$

Seja então $\underline{t > 0}$. O propagador fica .

$$\mathcal{D}_F(t,\vec{x}) = \langle 0|\, e^{i\hat{\mathcal{H}}_S t}\,\hat{\phi}(\vec{x})\,e^{-i\hat{\mathcal{H}}_S t}\,\hat{\phi}(0)\,|0\rangle$$

$$= \langle 0|\, \phi(\vec{x})\, e^{-i\hat{\mathcal{H}}_S t}\,\hat{\phi}(0)|0\rangle\, e^{iE_0 t}$$

Consideremos agora a função de correlação mecânico-estatística

$$\Gamma(n_0,\vec{n}) \equiv \langle \phi(n_0,\vec{n})\,\phi(0,\vec{0})\rangle =$$

$$= \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \prod_{n_0',\vec{n}'} d\phi(n_0',\vec{n}') \left[\phi(n_0,\vec{n}) \phi(0,\vec{0}) \right] e^{-I},$$

sendo que a integração é feita por fatias na direção temporal. O cálculo é feito da mesma maneira como para a função de partição usando a matriz de transferência. A única mudança acontece ao chegar as fatias com coordenadas temporais n_0 e 0. Assim obtemos a expressão

$$\Gamma(n_0,\vec{n}) = \frac{T_r\{\hat{T}^P \hat{\phi}(\vec{n}) \hat{T}^{n_0} \hat{\phi}(0) \hat{T}^L\}}{T_r\{\hat{T}^N\}}$$

$$= \frac{T_r\{\hat{\phi}(\vec{n}) \hat{T}^{n_0} \hat{\phi}(0) \hat{T}^{P+L}\}}{T_r\{\hat{T}^N\}},$$

onde $P+L+n_0 = N$, número total de fatias. Tomemos agora o limite $N \to \infty$, de maneira que

$$\hat{T} \sim |0\rangle e^{-E_0 \Delta\tau} \langle 0|$$

$$\Gamma(n_0,\vec{n}) \simeq \underbrace{e^{-E_0\Delta\tau(P+L)} e^{+E_0\Delta\tau N}}_{e^{+n_0 E_0 \Delta\tau}} \langle 0| \hat{\phi}(\vec{n}) e^{-n_0\Delta\tau \hat{\mathcal{H}}_s} \hat{\phi}(0)|0\rangle$$

$$= e^{E_0 \Delta\tau n_0} \langle 0 | \hat{\phi}(\vec{n})\, e^{-n_0 \Delta\tau \hat{\mathcal{H}}_s}\, \hat{\phi}(0) | 0 \rangle$$

e escrevendo $it = n_0\Delta\tau$, ou $t = -in_0\Delta\tau$, vemos que existe a correspondência

$$\Gamma(n_0, \vec{n}) = D_F(-in_0\Delta\tau, \vec{n}),$$

obtendo-se assim a relação:

Mecânica Estatística		Teoria Quântica de Campo
Função de Correlação	$\longleftrightarrow$	Propagador de Feynman

O conhecimento da função de correlação na Mecânica Estatística implica o conhecimento do propagador da TQC para tempo imaginário. A continuação analítica para tempo real deve então ser feita. Os postulados gerais da teoria de campo garantem que tal continuação analítica é possível.

Da mecânica Estatística sabe-se que a função de correlação cai exponencialmente quando longe do ponto crítico (fase de temperatura alta)

$$\Gamma(n_0, 0) \sim \exp(-|n_0|/\xi)$$

A grandeza ξ é chamada de comprimento de correlação.

Consideremos agora o propagador $D_F(-in_0\Delta\tau, 0)$, $n_0 > 0$

$$D_F(-in_0\Delta\tau, 0) = \langle 0| e^{n_0\Delta\tau\hat{\mathcal{H}}_s}\,\hat{\phi}(0)\, e^{-n_0\Delta\tau\hat{\mathcal{H}}_s}\,\hat{\phi}(0)|0\rangle$$

Inserindo um conjunto completo de autofunções de $\hat{\mathcal{H}}_s$, temos

$$D_F(-in_0\Delta\tau, 0) = \sum_{\ell} \langle 0| e^{n_0\Delta\tau\hat{\mathcal{H}}_s}\,\hat{\phi}(0)|\ell\rangle\langle \ell| e^{-n_0\Delta\tau\hat{\mathcal{H}}_s}\,\hat{\phi}(0)|0\rangle$$

$$= \sum_{\ell} e^{-n_0\Delta\tau(E_\ell - E_0)} \left|\langle 0|\hat{\phi}(0)|\ell\rangle\right|^2$$

Para $n_0\Delta\tau \gg 1$, a soma é dominada pela menor diferença $(E_\ell - E_0)$. Esta energia corresponde a criar a partícula mais leve com momentum nulo. Escrevemos então

$$E_1 - E_0 \equiv m \quad (= mc^2)$$

(com $c = 1$). O elemento de matriz $\langle 0|\hat{\phi}(0)|\ell\rangle$ certamente é não nulo neste caso. A diferença entre a energia do primeiro estado excitado e o estado fundamental é chamada de <u>mass-gap</u>. Assim temos o resultado

$$D_F(-i n_0 \Delta\tau, 0) \sim e^{-n_0 \Delta\tau\, m}$$

e sendo que $\Gamma(n_0, 0) \sim e^{\left(-|n_0|/\xi\right)}$, identificamos o mass-gap com o comprimento de correlação como segue

$$m \Longleftrightarrow \frac{1}{a\xi},$$

onde temos usado o fato que $\Delta\tau = a$, no caso isotrópico.

Mecânica Estatística		Teoria Quântica de Campos
Inverso do comprimento de correlação	$\longleftrightarrow$	mass gap

Em Mecânica Estatística, uma divergência do comprimento de correlação carateriza uma transição de fase, com o aparecimento da ordem de longo alcance. Estritamente, $\xi \to \infty$ define a região crítica para uma transição de fase de segunda ordem. Da relação estabelecida acima segue uma teoria de campos com partículas de pequenas massas equivale a fazer Mecânica Estatística perto do ponto crítico. Um limite interessante é dado por $a \to 0$ (contínuo), que significa que o espectro de excitações tem massas finitas só no caso $\xi \to \infty$.

Voltando ao caso da unicidade do estado fundamental: Segue que o mass-gap é finito e então o comprimento de correlação ξ é finito. Isso corresponde ao caso de $T > T_c$ para a Mecânica Estatística. A divergência de ξ está associada à $m \to 0$, que corresponde à ter um estado fundamental degenerado!

A matriz de Transferência é dominada pelos dois menores autovalores de $\mathcal{H}_S$ (dois maiores autovalores de $\hat{T}$):

$$\hat{T} = e^{-\Delta\tau \mathcal{H}_S}.$$

Seja $\lambda_0 = \exp(-\Delta\tau\, E_0)$, $\lambda_1 = \exp(-\Delta\tau\, E_1)$.

Temos:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \exp\left[\Delta\tau(E_1 - E_0)\right] = \exp(\Delta\tau\, m).$$

Daí:

$$\Delta\tau\, m = \ln\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)$$

e

$$m = \frac{1}{\Delta\tau}\ln\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)$$

$$= \frac{1}{a\xi}$$

Resultado: $\xi = \dfrac{1}{\ln(\lambda_0/\lambda_1)} \xrightarrow[\lambda_1 \to \lambda_0]{} \infty$

$$\boxed{\text{A Criticalidade implica em degenerescência.}}$$